



TITLE:

# 補間スプラインの算法、誤差 (数値計算のアルゴリズム)

AUTHOR(S):

秦野, 和郎

---

CITATION:

秦野, 和郎. 補間スプラインの算法、誤差 (数値計算のアルゴリズム). 数理解析研究所講究録 1976, 269: 1-33

ISSUE DATE:

1976-04

URL:

<http://hdl.handle.net/2433/105900>

RIGHT:

# 補間スプラインの算法、誤差

名大 大型センター 栗野和郎

問題 実軸上の分割  $\Delta: a=x_0 < x_1 < \dots < x_n=b$  に対して

$f_i^{(\alpha)} = f^{(\alpha)}(x_i) : i=0, 1, \dots, k-1, \quad j=0, 1, \dots, n$  が与えられ

$f(x) \in C^{2m+1}[a, b]$  とする。

$S(x)$  は各区間  $x_i \leq x \leq x_{i+1} \quad (i=0, 1, \dots, n-1)$  に対して、たか  
だか  $2m-1$  次多項式であつて  $S(x) \in C^{2m-1-k}[a, b]$  とする。

[Type-I]  $f_0^{(\beta)}, f_n^{(\beta)} : \beta=k, k+1, \dots, m-1$  が与えられたとき

$$S^{(\alpha)}(x_i) = f_i^{(\alpha)} : i=0, 1, \dots, k-1, \quad j=0, 1, \dots, n$$

$$\begin{cases} S^{(\beta)}(x_0) = f_0^{(\beta)} \\ S^{(\beta)}(x_n) = f_n^{(\beta)} \end{cases} \quad \beta=k, k+1, \dots, m-1$$

をみたす  $S(x)$  を得る算法及び  $\|f^{(l)}(x) - S^{(l)}(x)\|_\infty : l=0, 1, \dots, 2m-1$  の評価

[Type-II]  $f_0^{(\beta)}, f_n^{(\beta)} : \beta=m, m+1, \dots, 2m-1-k$  が与えられた

とき  $S^{(\alpha)}(x_i) = f_i^{(\alpha)} : i=0, 1, \dots, k-1, \quad j=0, 1, \dots, n$

$$\begin{cases} S^{(\beta)}(x_0) = f_0^{(\beta)} \\ S^{(\beta)}(x_n) = f_n^{(\beta)} \end{cases} : \beta=m, m+1, \dots, 2m-1-k$$

をみたす  $S(x)$  を得る 算法及び  $\|f^{(k)}(x) - S^{(k)}(x)\|_\infty$  :  $k=0, 1, \dots, 2m-1$  の評価

[Periodic]  $f(x)$  が周期  $b-a$  の周期関数であるとき、即ち  $f_0^{(p)} = f_n^{(p)}$  :  $p=0, 1, \dots$   $a \leq x \leq b$  とき、 $S^{(k)}(x_i) = f_i^{(k)}$  :  $x_i = a + (b-a)i/(n+1)$  :  $i=0, 1, \dots, n$  をみたし、 $S^{(p)}(x_0) = S^{(p)}(x_n)$  :  $p=0, 1, \dots, 2m-1-k$  をみたす  $S(x)$  の 算法及び、 $\|f^{(k)}(x) - S^{(k)}(x)\|_\infty$  :  $k=0, 1, \dots, 2m-1$  の評価

多くの文献では、 $S(x)$  を deficient spline with deficiency  $k$  (多重度  $k$  の多項式スプライン) と呼んでいるが、ここでは、単に「補間スプライン」と呼ぶことにする。多くの場合、 $1 \leq k \leq m$  とするが、ここでは  $1 \leq k \leq m-1$  とする。(  $k=m$  のとき、 $S(x)$  を deficient spline with maximum deficiency と呼ぶが、この場合は §1 に述べる区分的エルミート補間に一致する。)

原則的には  $S(x)$  を得る事は簡単に思える。 $S(x)$  は多項式であるから、各区間毎に  $S_i(x) = \sum_{j=0}^{2m-1-k} a_{ij}(x-x_i)^j$  とおいて与えられた条件を適用し、 $a_{ij}$  を未知数とする連立一次方程式を作り、これを解けば、 $S(x)$  が得られるように思われる。この方法は多くの場合、そうであるように得られる連立一次方程式は、極めて悪条件であり、 $n, m$  が極めて小さい場合

を除き、実用的でない。

$m=2, k=1$  即ち cubic spline の算法は早くから知られており、多くの分野で使用されていく。

$m \geq 3, k=1$  の場合の算法は、1968年頃に始めて文献にあらわれていく。ここに与えられた算法は  $S(x)$  を B-spline の線型結合で表現し、その係数を連立一次方程式を解いて得るという方法で、 $m=6$  程度まで適用しうると言われている。その後、これを改良した算法が 2.3 現われていく。しかし B-spline が非常に理解しにくいものがあり、又、次数の高いスプラインから3次スプラインに比較して、どの程度、有用であるか、はっきりわからなかった事もあって、いまだに普及するに至っていない。

$k > 1$  に対するスプラインの算法はこれまでの所は知られていない。

ここでは  $1 \leq k \leq m-1$  に対して  $m=8$  程度までの安定に計算できる算法を示す。

$\|f^{(k)}(x) - S^{(k)}(x)\|_\infty$  は  $m=2, k=1$  の場合と  $m=2, k=2$  の場合とは、C.A. Hall が十分、実用的な評価をしていく。しかし、それ以外の場合は、多くの解析が試みられていくにもかかわらず、収束率の評価も与えられていない。

ここでは分割  $\Delta$  を与えられたとき、いくぶん控え目の評価

よって、十分に実用的な誤差評価を示す。

§1 に於いて  $S(x)$  の算法、誤差評価に重要な役割りを果たす区分的エルミート補間について述べる。

§2 の 3 次スプラインの標準的な算法を拡張した形の  $S(x)$  の算法を示す。

§3 の C.A. Hall の 3 次スプラインの誤差評価を得た方法と類似した方法で  $S(x)$  の誤差評価を試みる。

## 2. 1. 区分的エルミート補間.

$x_0 \leq x \leq x_{m+1}$  である  $x$  の区分的エルミート補間を、

$$H_i(x_i) = \sum_{k=0}^{m-1} h_i^k \{ f_i^{(k)} p_k(x_i) + f_{i+1}^{(k)} g_k(x_i) \} \quad (2.1)$$

と表現する。  $h_i = x_{m+1} - x_i$ ,  $t_i = \frac{x - x_i}{h_i}$  ( $0 \leq t_i \leq 1$ ) である。

ここで  $\delta_{\alpha, l}$  は  $\delta$  の Kronecker 記号と置く。

$$\begin{cases} p_{\alpha}^{(l)}(0) = \delta_{\alpha, l} \\ p_{\alpha}^{(l)}(1) = 0 \end{cases} \quad \begin{cases} g_{\alpha}^{(l)}(0) = 0 \\ g_{\alpha}^{(l)}(1) = \delta_{\alpha, l} \end{cases} \quad (2.2)$$

$$\alpha = 0, 1, \dots, m-1 \quad l = 0, 1, \dots, m-1$$

である。但し、 $t_i$  と置けば  $p_{\alpha}^{(l)}(0) = \left[ \frac{d^l}{dt^l} p_{\alpha}(t) \right]_{t=0}$  である。

(2.2) 式を用いて  $\left[ \frac{d^l}{dx^l} H_i(x_i) \right]_{x=x_i} = f_i^{(l)}$ ,  $\left[ \frac{d^l}{dx^l} H_i(x_i) \right]_{x=x_{m+1}} = f_{i+1}^{(l)}$  であることが容易に確かめられる。(2.2) 式をみたす多項式  $p_{\alpha}(t)$ ,  $g_{\alpha}(t)$  は Ahlberg, Nielson, Walsh が与えている。

Ahlberg, Nielson, Walsh によれば

$$\begin{aligned}
 \left\{ \begin{aligned} p_\alpha(x) &= \frac{x^\alpha}{\alpha!} + \frac{1}{\alpha!} \sum_{j=m}^{2m-1} (-1)^{j-m-1} \binom{j-1-\alpha}{m-1-\alpha} \binom{2m-1-\alpha}{2m-1-j} x^j \\ g_\alpha(x) &= \frac{1}{\alpha!} \sum_{j=m}^{2m-1} (-1)^{j+m} \sum_{r=0}^{\alpha} \binom{j-r-1}{m-1} \binom{2m-1-\alpha}{j-r} \binom{\alpha}{r} x^j \\ &= \frac{1}{\alpha!} \sum_{j=m}^{2m-1} (-1)^{j+m} \binom{j-1-\alpha}{m-1-\alpha} \binom{2m-1-\alpha}{2m-1-j} \\ &\quad \times \sum_{r=0}^{\alpha} \frac{(j-\alpha) \binom{2m-1-j}{\alpha-r} \binom{j-m}{r}}{(j-r) \binom{m-1}{\alpha}} x^j \end{aligned} \right. \quad (2.3)
 \end{aligned}$$

である。  $p_\alpha(x)$ ,  $g_\alpha(x)$  は次の恒等式を満たす。

$$g_\alpha(x) = (-1)^\alpha p_\alpha(1-x), \quad p_\alpha(x) = (-1)^\alpha g_\alpha(1-x) \quad (2.4)$$

$$\left\{ \begin{aligned} \frac{x^\alpha}{\alpha!} - \left\{ p_\alpha(x) + \sum_{r=0}^{\alpha} \frac{1}{(\alpha-r)!} g_r(x) \right\} &= 0 \\ \frac{(x-1)^\alpha}{\alpha!} - \left\{ g_\alpha(x) + \sum_{r=0}^{\alpha} \frac{(-1)^{\alpha-r}}{(\alpha-r)!} p_r(x) \right\} &= 0 \end{aligned} \right. \quad (2.5)$$

$$\frac{x^\beta}{\beta!} - \sum_{r=0}^{m-1} \frac{g_r(x)}{(\beta-r)!} = 0, \quad \frac{(x-1)^\beta}{\beta!} - \sum_{r=0}^{m-1} \frac{(-1)^{\beta-r}}{(\beta-r)!} p_r(x) = 0 \quad (2.6)$$

$$\left\{ \begin{aligned} \frac{x^{2m}}{(2m)!} - \sum_{r=0}^{m-1} \frac{1}{(2m-r)!} g_r(x) &= \frac{1}{(2m)!} \{x(x-1)\}^m \\ \frac{(x-1)^{2m}}{(2m)!} - \sum_{r=0}^{m-1} \frac{(-1)^r}{(2m-r)!} p_r(x) &= \frac{1}{(2m)!} \{x(x-1)\}^m \end{aligned} \right. \quad (2.7)$$

$$\alpha = 0, 1, \dots, m-1 \quad : \quad \beta = m, m+1, \dots, 2m-1$$

これから (2.2) 式を使うと証明できる。

次に (2.5) ~ (2.7) 式を使つて、2 区間の区間に一対称性の誤差を導き出す。

$F_H(f) \equiv f(x) - H_1(x)$  に積分剰余項を含む Taylor 展開式

$$f(x) = \sum_{j=0}^{2m-1} \frac{(x-x_0)^j}{j!} f^{(j)}(x_0) + \frac{1}{(2m-1)!} \int_{x_0}^x (x-y)^{2m-1} f^{(2m)}(y) dy$$

を代入すると、

$$\begin{aligned}
F_H(f) &= \sum_{\alpha=0}^{m-1} \left[ \frac{x_i^\alpha}{\alpha!} - \left\{ p_\alpha(x_i) + \sum_{r=0}^{\alpha} \frac{\bar{p}_r(x_i)}{( \alpha-r )!} \right\} \right] h_i^\alpha f_i^{(\alpha)} \\
&\quad + \sum_{\beta=m}^{2m-1} \left[ \frac{x_i^\beta}{\beta!} - \sum_{r=0}^{m-1} \frac{\bar{p}_r(x_i)}{( \beta-r )!} \right] h_i^\beta f_i^{(\beta)} \\
&\quad + \int_{x_0}^{x_{i+1}} \left[ \frac{(x-y)_+^{2m-1}}{(2m-1)!} - \sum_{\alpha=0}^{m-1} \frac{(x_{i+1}-y)^{2m-1-\alpha}}{(2m-1-\alpha)!} h_i^\alpha \bar{p}_\alpha(x_i) \right] f^{(2m)}(y) dy
\end{aligned}$$

とすると、右辺の第1項及び第2項は、(2.5), (2.6) 式から0に

なる。又、ここで、

$$(x-y)_+^{2m-1} = \begin{cases} (x-y)^{2m-1} & x \geq y \\ 0 & x < y \end{cases}$$

である、 $\lambda_i = \frac{y-x_i}{h_i}$  とおくと、

$$F_H(f) = h_i^{2m} \int_0^1 g_H(x_i, \lambda_i) f^{(2m)}(y) d\lambda_i \quad (2.8)$$

$$g_H(x, \lambda) = \begin{cases} - \sum_{\alpha=0}^{m-1} (-1)^\alpha \frac{\lambda^{2m-1-\alpha}}{(2m-1-\alpha)!} p_\alpha(x) & (0 \leq \lambda \leq x) \\ \sum_{\alpha=0}^{m-1} (-1)^\alpha \frac{(1-\lambda)^{2m-1-\alpha}}{(2m-1-\alpha)!} \bar{p}_\alpha(x) & (x \leq \lambda \leq 1) \end{cases}$$

とすれば、

$$F_H^{(l)}(f) = \frac{d^l}{dx^l} F_H(f) = h_i^{2m-l} \int_0^1 g_H^{(l)}(x_i, \lambda_i) f^{(2m)}(y) d\lambda_i$$

$$g_H^{(l)}(x, \lambda) = \frac{\partial^l}{\partial x^l} g_H(x, \lambda) \quad (2.9)$$

である。これから、左側のエルミート関数の誤差の上限を求めよう。

ここで、(2.8), (2.9) に必要となる定数を導入しておくと、(2.3) 式を次のように微分し、 $x=0$  とおくと、

$$\begin{cases} p_\alpha^{(l)}(0) = (-1)^{l-m-1} \frac{(l-\alpha-1)! (2m-1-\alpha)!}{(m-1-\alpha)!} \binom{l}{\alpha} (l-\alpha)! \\ g_\alpha^{(l)}(0) = (-1)^{\alpha+l-m} \frac{\alpha}{\sum_{r=0}^{\alpha} \binom{l-r-1}{m-1}} \frac{(2m-1-\alpha)!}{(l-\alpha)!} \binom{\alpha}{r} \binom{l}{\alpha} (l-\alpha)! \\ = (-1)^{\alpha-1} p_\alpha^{(l)}(0) \cdot g_\alpha^{(l)} \end{cases} \quad (2.10)$$

$$r_{\alpha}^{(\beta)} = \sum_{r=0}^{\alpha} \frac{(l-\alpha)(2m-\alpha-r)(l-m)}{(l+r)(m-r)}$$

$$l = m, m+1, \dots, 2m-1 \quad \alpha = 0, 1, \dots, m-1$$

と仮定

$$R_{\alpha} = \frac{p_0^{(2m-1)}(0)}{p_{\alpha}^{(2m-1)}(0)} \cdot \frac{(\alpha+1)(2m-1)}{(2m-1-\alpha)} = (\alpha+1)! \frac{(2m-1)_{\alpha}}{(m-1)_{\alpha}}$$

$$\begin{aligned} P_{\alpha}^{(\beta)} &= \frac{\beta+1}{2m-1-\beta} \cdot \frac{p_{\alpha}^{(2m-1-\beta)}(0)}{p_0^{(2m-1-\beta)}(0)} \cdot \frac{p_0^{(2m-1)}(0)}{p_{\alpha}^{(2m-1)}(0)} \cdot \frac{(\alpha+1)(2m-1)}{(2m-1-\alpha)} \\ &= \frac{(\alpha+1)(\beta+1)}{2m-1-\alpha-\beta} \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} Q_{\alpha}^{(\beta)} &= \frac{\beta+1}{(2m-1-\beta)} \cdot \frac{\bar{p}_{\alpha}^{(2m-1-\beta)}(0)}{\bar{p}_0^{(2m-1-\beta)}(0)} \cdot \frac{p_0^{(2m-1)}(0)}{p_{\alpha}^{(2m-1)}(0)} \cdot \frac{(\alpha+1)(2m-1)}{2m-1-\alpha} \\ &= (-1)^{\alpha+1} \frac{(\alpha+1)(\beta+1)}{2m-1-\alpha-\beta} \cdot r_{\alpha}^{(2m-1-\beta)} \end{aligned}$$

$$r_{\alpha}^{(2m-1-\beta)} = \sum_{r=0}^{\alpha} \frac{(2m-1-\beta-\alpha)(m-1-\beta-r)}{(2m-1-\beta-r)(m-r)}$$

$$U_{\alpha}^{(\beta)} = \frac{\beta+1}{2m-1-\beta} \cdot \frac{\bar{p}_{\alpha}^{(2m-1-\beta)}(0)}{p_0^{(2m-1-\beta)}(0)} = \frac{Q_{\alpha}^{(\beta)}}{R_{\alpha}}$$

$$V^{(\beta)} = \frac{\beta+1}{2m-1-\beta} \cdot \frac{1}{p_0^{(2m-1-\beta)}(0)} = (-1)^{m-\beta} \frac{(m-1)!(m-1-\beta)!}{(2m-1)!(2m-1-\beta)!} (\beta+1)!$$

§4 v.  $\sum_{\alpha=0}^{m-1} \frac{U_{\alpha}^{(\beta)}}{(2m-\alpha)!}$  の値を求めよう。 (2.7) の第一式を

に代へば、 $2m-1-\beta$  階微分し、 $x=0$  とおくと、

$$-\sum_{\alpha=0}^{m-1} \frac{\bar{p}_{\alpha}^{(2m-1-\beta)}(0)}{(2m-\alpha)!} = \frac{1}{(2m)!} (m-1-\beta)(-1)^{\beta+1} (2m-1-\beta)!$$

と仮定して、

$$\sum_{\alpha=0}^{m-1} \frac{U_{\alpha}^{(\beta)}}{(2m-\alpha)!} = (-1)^m \frac{(m-1)! m!}{(2m-1)!(2m)!}$$

と仮定



§2. 神間スプラインの算法.

$$u_i^{(r)} = f_i^{(r)} = f^{(r)}(x_i) \quad : \quad i=0,1,\dots,n, \quad r=0,1,\dots,k-1$$

与えられたとして、神間スプラインを.

$$\begin{cases} S(x) = \bigcup_{i=0}^{n-1} S_i(x_i) \\ S_i(x_i) = \sum_{j=0}^{m-1} h_i^{\alpha} \{ u_i^{(j)} p_{\alpha}(x_i) + u_{i+1}^{(j)} g_{\alpha}(x_i) \} \end{cases} \quad (3.1)$$

と表現する。ここで  $u_i^{(r)} : i=0,1,\dots,n, \quad r=k, k+1, \dots, m-1$  は未知の107  $\times -7$  である。

(2.2) 式から.

$$S_{\alpha}^{(l)}(x) = S_0^{(l)}(x) = u_0^{(l)} \quad l=0,1,\dots,m-1, \quad i=1,2,\dots,n-1$$

が容易に確認しう。神間スプラインの仮定から、更に.

$$S_{\alpha}^{(l)}(1) = S_0^{(l)}(x) \quad : \quad l=m, m+1, \dots, 2m-k, \quad i=1,2,\dots,n-1 \quad (3.2)$$

が成立する。よって、(3.1), (3.2) 式から.

$$\begin{aligned} & - \sum_{j=0}^{m-1} h_i^{\alpha-j} \{ u_{i+1}^{(j)} p_{\alpha}(x_i) + u_i^{(j)} g_{\alpha}(x_i) \} \\ & + \sum_{j=0}^{m-1} h_i^{\alpha-j} \{ u_i^{(j)} p_{\alpha}(x_i) + u_{i+1}^{(j)} g_{\alpha}(x_i) \} = 0 \end{aligned} \quad (3.3)$$

である。  $g_{\alpha}(x_i) = (-1)^{\alpha-1} p_{\alpha}(x_i)$ ,  $p_{\alpha}(x_i) = (-1)^{\alpha} g_{\alpha}(x_i)$  を代入し.

$l=2m-1-\beta$  ( $\beta=k, k+1, \dots, m-1$ ) とおく。

$$\begin{aligned} & \sum_{j=0}^{m-1} [ (-1)^{\alpha+\beta} h_i^{\alpha+\beta-(2m-1)} g_{\alpha}^{(2m-1-\beta)}(x_i) u_{i+1}^{(j)} \\ & + \{ h_i^{\alpha+\beta-(2m-1)} + (-1)^{\alpha+\beta} h_i^{\alpha+\beta-(2m-1)} \} p_{\alpha}^{(2m-1-\beta)}(x_i) u_i^{(j)} \\ & + h_i^{\alpha+\beta-(2m-1)} g_{\alpha}^{(2m-1-\beta)}(x_i) u_{i+1}^{(j)} ] = 0 \end{aligned} \quad (3.4)$$

である。ここで.

$$\eta = \frac{x_n - x_0}{n}, \quad \delta_i = \frac{h_i}{\eta}$$

$$u_i^{(\alpha)} = \frac{p_0^{(2m-1)}(0)}{p_\alpha^{(2m-1)}(0)} \cdot \frac{(\alpha+1)(2m-1)}{2m-1-\alpha} \cdot \eta^{-\alpha} \cdot v_i^{(\alpha)}$$

$$= R_\alpha \cdot \eta^{-\alpha} \cdot v_i^{(\alpha)}$$

と置き、更に  $\frac{\beta+1}{2m-1-\beta} \cdot \frac{1}{p_0^{(2m-1-\beta)}(0)} \cdot \eta^{2m-1-\beta} \quad \pm \text{ かつ } 2,$

$$\begin{cases} a_{i,i-1}^{\beta,\alpha} = (-1)^{\alpha+\beta} \theta_{i-1}^{\alpha+\beta-(2m-1)} Q_\alpha^{(\beta)} \\ a_{i,i}^{\beta,\alpha} = \left\{ \theta_i^{\alpha+\beta-(2m-1)} + (-1)^{\alpha+\beta} \theta_{i-1}^{\alpha+\beta-(2m-1)} \right\} P_\alpha^{(\beta)} \\ a_{i,i+1}^{\beta,\alpha} = \theta_i^{\alpha+\beta-(2m-1)} Q_\alpha^{(\beta)} \end{cases} \quad (3.4)$$

と置く、(3.4) 式は、

$$\sum_{j=k}^{m-1} [a_{i,i-1}^{\beta,\alpha} v_{i-1}^{(\alpha)} + a_{i,i}^{\beta,\alpha} v_i^{(\alpha)} + a_{i,i+1}^{\beta,\alpha} v_{i+1}^{(\alpha)}] = \phi_i^{(\beta)} \quad (3.5)$$

$$\phi_i^{(\beta)} = - \sum_{j=0}^{k-1} \frac{\eta^\alpha}{R_\alpha} \{ a_{i,i-1}^{\beta,\alpha} f_{i-1}^{(\alpha)} + a_{i,i}^{\beta,\alpha} f_i^{(\alpha)} + a_{i,i+1}^{\beta,\alpha} f_{i+1}^{(\alpha)} \}$$

$$\beta = k, k+1, \dots, m-1$$

と置く。

$$A_{i,j} = \begin{pmatrix} a_{i,j}^{k,k} & a_{i,j}^{k,k+1} & \dots & a_{i,j}^{k,m-1} \\ a_{i,j}^{k+1,k} & \dots & \dots & \dots \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ a_{i,j}^{m-1,k} & \dots & \dots & a_{i,j}^{m-1,m-1} \end{pmatrix}$$

$$v_i = (v_i^{(k)}, v_i^{(k+1)}, \dots, v_i^{(m-1)})^T$$

$$\phi_i = (\phi_i^{(k)}, \phi_i^{(k+1)}, \dots, \phi_i^{(m-1)})^T$$

とすれば、

$$A_{i,i-1} v_{i-1} + A_{i,i} v_i + A_{i,i+1} v_{i+1} = \phi_i \quad (3.6)$$

$$i=1, 2, \dots, m-1$$

と置く。

[Type-I]

仮定  $k \neq n$ .  $u_0^{(r)} = f_0^{(r)}$ ,  $u_n^{(r)} = f_n^{(r)}$  :  $r = k, k+1, \dots, \cancel{m-1}$   
 である。これを (3.5) 式で  $i=1, j=n-1$  とした式に代入すると

と

$$\sum_{\alpha=k}^{m-1} [a_{11}^{\beta, \alpha} v_1^{(\alpha)} + a_{12}^{\beta, \alpha} v_2^{(\alpha)}] = \phi_1^{(\beta)} - \sum_{\alpha=k}^{m-1} a_{10}^{\beta, \alpha} \frac{\eta^\alpha}{R_\alpha} f_0^{(\alpha)} = \tau_1^{(\beta)}$$

$$\sum_{\alpha=k}^{m-1} [a_{n-1, n-2}^{\beta, \alpha} v_{n-2}^{(\alpha)} + a_{n-1, n-1}^{\beta, \alpha} v_{n-1}^{(\alpha)}] = \phi_{n-1}^{(\beta)} - \sum_{\alpha=k}^{m-1} a_{n-1, n}^{\beta, \alpha} \frac{\eta^\alpha}{R_\alpha} f_n^{(\alpha)} = \tau_{n-1}^{(\beta)}$$

である。

$$\pi_1 = (\tau_1^{(k)}, \tau_1^{(k+1)}, \dots, \tau_1^{(m-1)})^T$$

$$\pi_{n-1} = (\tau_{n-1}^{(k)}, \tau_{n-1}^{(k+1)}, \dots, \tau_{n-1}^{(m-1)})^T$$

とすると、

$$\begin{cases} A_{11} v_1 + A_{12} v_2 = \pi_1 \\ A_{i, i-1} v_{i-1} + A_{i, i} v_i + A_{i, i+1} v_{i+1} = \phi_i \\ i = 2, 3, \dots, n-2 \\ A_{n-1, n-2} v_{n-2} + A_{n-1, n-1} v_{n-1} = \pi_{n-1} \end{cases} \quad (3.7)$$

なる、ブロック対角の連立一次方程式が得られる。これを解いて  $v_i^{(\alpha)}$  を得、 $u_i^{(\alpha)}$  を得て、(3.1) 式に代入すれば、任意の点における解向値が求まる。

より必要ならば  $n$  次の行列を定義しておく。

$$A_I = \begin{pmatrix} A_{11} & A_{12} & 0 & 0 & \dots & 0 \\ A_{21} & A_{22} & A_{23} & 0 & \dots & \vdots \\ 0 & & & & & 0 \\ \vdots & & & & & \vdots \\ 0 & \dots & \dots & 0 & A_{n-2, n-2} & A_{n-2, n-1} \\ & & & & A_{n-1, n-2} & A_{n-1, n-1} \end{pmatrix}$$

$$B_I = A_I^{-1} = \begin{pmatrix} B_{11} & B_{12} & \cdots & B_{1,n-1} \\ B_{21} & B_{22} & B_{23} & \cdots \\ \vdots & \vdots & \vdots & \vdots \\ B_{n-1,1} & B_{n-1,2} & \cdots & B_{n-1,n-1} \end{pmatrix}$$

$$B_{i,j} = \begin{pmatrix} b_{i,j}^{(k,k)} & b_{i,j}^{(k,k+1)} & \cdots & b_{i,j}^{(k,n-1)} \\ \vdots & \vdots & \vdots & \vdots \\ b_{i,j}^{(n-1,k)} & b_{i,j}^{(n-1,k+1)} & \cdots & b_{i,j}^{(n-1,n-1)} \end{pmatrix}$$

[Type-II]

$$\text{級数 } v: \sigma \eta \quad \bar{D}_0^{(l)}(0) = f_0^{(l)}, \quad \bar{D}_{n-1}^{(l)}(1) = f_n^{(l)} \quad : l = n, n+1, \dots, 2n-1-k$$

$\in H < \infty$ .

$$\begin{cases} \sum_{\alpha=0}^{n-1} h_0^{\alpha-2} \{ u_0^{(u)} p_\alpha^{(l)}(0) + u_0^{(u)} \bar{q}_\alpha^{(l)}(0) \} = f_0^{(l)} \\ \sum_{\alpha=0}^{n-1} h_{n-1}^{\alpha-2} \{ u_{n-1}^{(u)} p_\alpha^{(l)}(1) + u_n^{(u)} \bar{q}_\alpha^{(l)}(1) \} = f_n^{(u)} \end{cases}$$

$$l = n, n+1, \dots, 2n-1-k$$

$2^{\circ} \text{ 例 } \sigma_0$

$$\begin{cases} a_{0,0}^{\beta,\alpha} = \theta_0^{\alpha+\beta-(2n-1)} P_\alpha^{(\beta)} \\ a_{0,1}^{\beta,\alpha} = \theta_0^{\alpha+\beta-(2n-1)} Q_\alpha^{(\beta)} \\ a_{n,n-1}^{\beta,\alpha} = (-1)^{\alpha+\beta} \theta_{n-1}^{\alpha+\beta-(2n-1)} Q_\alpha^{(\beta)} \\ a_{n,n}^{\beta,\alpha} = (-1)^{\alpha+\beta} \theta_{n-1}^{\alpha+\beta-(2n-1)} P_\alpha^{(\beta)} \end{cases}$$

$\in H < \infty$ .

$$\begin{cases} \sum_{\alpha=k}^{n-1} [a_{0,0}^{\beta,\alpha} v_0^{(u)} + a_{0,1}^{\beta,\alpha} v_1^{(u)}] = \tau_0^{(\beta)} \\ \sum_{\alpha=k}^{n-1} [a_{n,n-1}^{\beta,\alpha} v_{n-1}^{(u)} + a_{n,n}^{\beta,\alpha} v_n^{(u)}] = \tau_n^{(\beta)} \end{cases}$$

$$\begin{aligned} \tau_0^{(\beta)} &= -\sum_{\alpha=0}^{k-1} \frac{\eta^\alpha}{R_\alpha} \{a_{0,0}^{\beta,\alpha} f_0^{(\alpha)} + a_{0,1}^{\beta,\alpha} f_1^{(\alpha)}\} + V^{(\beta)} f_0^{(2n-1-\beta)} \eta^{2n-1-\beta} \\ \tau_n^{(\beta)} &= -\sum_{\alpha=0}^{k-1} \frac{\eta^\alpha}{R_\alpha} \{a_{n,n-1}^{\beta,\alpha} f_{n-1}^{(\alpha)} + a_{n,n}^{\beta,\alpha} f_n^{(\alpha)}\} - V^{(\beta)} f_n^{(2n-1-\beta)} \eta^{2n-1-\beta} \end{aligned}$$

となる。Type-I の場合と同様。7.0より3重対角の連立一次方程式、

$$\begin{cases} A_{0,0} \psi_0 + A_{0,1} \psi_1 = \sigma_0 \\ A_{i,i-1} \psi_{i-1} + A_{i,i} \psi_i + A_{i,i+1} \psi_{i+1} = \phi_i \\ i = 1, 2, \dots, n-1 \\ A_{n,n-1} \psi_{n-1} + A_{n,n} \psi_n = \sigma_n \end{cases} \quad (3.8)$$

を解き、 $v_i^{(\alpha)}$  を得る。 $u_i^{(\alpha)}$  を得、(3.1) 式に代入すれば、任意の  $\beta$  に対して解を得る。

[Periodic]

仮定に8.9.  $u_0^{(\alpha)} = u_n^{(\alpha)}$  :  $\alpha = 0, 1, \dots, 2n-1-k$  である

$$\begin{cases} a_{1,n}^{\beta,\alpha} = (-1)^{\alpha+\beta} \phi_0^{\alpha+\beta-(2n-1)} Q_\alpha^{(\beta)} \\ a_{n,1}^{\beta,\alpha} = \phi_0^{\alpha+\beta-(2n-1)} Q_\alpha^{(\beta)} \\ a_{n,n}^{\beta,\alpha} = \{ \phi_0^{\alpha+\beta-(2n-1)} + (-1)^{\alpha+\beta} \phi_{n-1}^{\alpha+\beta-(2n-1)} \} P_\alpha^{(\beta)} \\ \tau_1^{(\beta)} = -\sum_{\alpha=0}^{k-1} \frac{\eta^\alpha}{R_\alpha} \{ a_{1,1}^{\beta,\alpha} v_1^{(\alpha)} + a_{1,2}^{\beta,\alpha} v_2^{(\alpha)} + a_{1,n}^{\beta,\alpha} v_n^{(\alpha)} \} \\ \tau_n^{(\beta)} = -\sum_{\alpha=0}^{k-1} \frac{\eta^\alpha}{R_\alpha} \{ a_{n,1}^{\beta,\alpha} v_1^{(\alpha)} + a_{n,n-1}^{\beta,\alpha} v_{n-1}^{(\alpha)} + a_{n,n}^{\beta,\alpha} v_n^{(\alpha)} \} \end{cases}$$

とすると、連立一次方程式、

$$\begin{cases} A_{11} \psi_1 + A_{12} \psi_2 + A_{1,n} \psi_n = \sigma_1 \\ A_{i,i-1} \psi_{i-1} + A_{i,i} \psi_i + A_{i,i+1} \psi_{i+1} = \phi_i \\ i = 2, 3, \dots, n-1 \end{cases} \quad (3.9)$$

$$A_{n,1} v_1 + A_{n,n-1} v_{n-1} + A_{n,n} v_n = p_n$$

が得られる。この場合は  $A$  の  $n$  番対角成分は  $1$  だけ、それ以外は  $0$  である。

$$A_p = \begin{pmatrix} A_{11} & A_{12} & 0 & 0 & \cdots & 0 & A_{1,n} \\ A_{21} & A_{22} & A_{23} & 0 & \cdots & 0 & 0 \\ 0 & & & & & & \vdots \\ \vdots & & & & & & \vdots \\ 0 & 0 & \cdots & \cdots & \cdots & \cdots & A_{n-1,n} \\ A_{n,1} & 0 & \cdots & \cdots & \cdots & 0 & A_{n,n-1} & A_{n,n} \end{pmatrix}$$

が得られる。

### 3.3. 解の誤差の推定

(2.9) 式から、

$$f^{(l)}(x_i + 0) = \sum_{\alpha=0}^{m-1} h_i^{\alpha-l} \{ f_i^{(l)} p_\alpha^{(l)}(0) + f_{i+1}^{(l)} g_\alpha^{(l)}(0) \} \\ + h_i^{2m-l} \int_0^1 g_H^{(l)}(0, \lambda) f^{(2m)}(y) d\lambda$$

$$f^{(l)}(x_i - 0) = \sum_{\alpha=0}^{m-1} h_{i-1}^{\alpha-l} \{ f_{i-1}^{(l)} p_\alpha^{(l)}(1) + f_i^{(l)} g_\alpha^{(l)}(1) \} \\ + h_{i-1}^{2m-l} \int_0^1 g_H^{(l)}(1, \lambda) f^{(2m)}(y) d\lambda$$

とある。  $f(x) \in C^{2m+1}[a, b]$  と仮定する。

$$f^{(l)}(x_i - 0) = f^{(l)}(x_i + 0) \quad : l = m, m+1, \dots, 2m-l-k$$

とある。よって、

$$-\sum_{\alpha=0}^{m-1} h_{i-1}^{\alpha-l} \{ f_{i-1}^{(l)} p_\alpha^{(l)}(1) + f_i^{(l)} g_\alpha^{(l)}(1) \} + \sum_{\alpha=0}^{m-1} h_i^{\alpha-l} \{ f_i^{(l)} p_\alpha^{(l)}(0) + f_{i+1}^{(l)} g_\alpha^{(l)}(0) \} \\ = h_{i-1}^{2m-l} \int_0^1 g_H^{(l)}(1, \lambda) f^{(2m)}(y) d\lambda - h_i^{2m-l} \int_0^1 g_H^{(l)}(0, \lambda) f^{(2m)}(y) d\lambda$$

となる。この式と (3.3) 式から、

$$\begin{aligned}
& - \sum_{\alpha=0}^{m-1} h_{i-1}^{\alpha-l} \{ (f_{i-1}^{(u)} - u_{i-1}^{(u)}) p_{\alpha}^{(u)}(1) + (f_i^{(u)} - u_i^{(u)}) g_{\alpha}^{(u)}(1) \} \\
& + \sum_{\alpha=0}^{m-1} h_i^{\alpha-l} \{ (f_0^{(u)} - u_0^{(u)}) p_{\alpha}^{(u)}(0) + (f_{i+1}^{(u)} - u_{i+1}^{(u)}) g_{\alpha}^{(u)}(0) \} \\
& = h_{i-1}^{2m-l} \int_0^1 g_H^{(u)}(1, \lambda_{i-1}) f^{(2u)}(y) d\lambda_{i-1} - h_i^{2m-l} \int_0^1 g_H^{(u)}(0, \lambda_i) f^{(2u)}(y) d\lambda_i \quad (4.1) \\
& l = m, m+1, \dots, 2m-1-k
\end{aligned}$$

とすると  $g_{\alpha}^{(u)}(1) = (-1)^{\alpha-l} p_{\alpha}^{(u)}(0)$ ,  $p_{\alpha}^{(u)}(1) = (-1)^{\alpha-l} g_{\alpha}^{(u)}(0)$  と代る。

$l = 2m-1-\beta$  とおく。更に  $f_i^{(u)} = u_i^{(u)}$  :  $\alpha = 0, 1, \dots, k-1$ ,  $\bar{u} = 0, 1, \dots, m-1$  と代る。

...,  $m-1$  と代る。

$$\begin{aligned}
& \sum_{\alpha=k}^{m-1} [ (-1)^{\alpha+\beta} h_{i-1}^{\alpha+\beta-(2m-1)} g_{\alpha}^{(2m-1-\beta)}(0) (f_{i-1}^{(u)} - u_{i-1}^{(u)}) \\
& + \{ h_i^{\alpha+\beta-(2m-1)} + (-1)^{\alpha+\beta} h_{i-1}^{\alpha+\beta-(2m-1)} \} p_{\alpha}^{(u)}(0) (f_i^{(u)} - u_i^{(u)}) \\
& + h_i^{\alpha+\beta-(2m-1)} g_{\alpha}^{(2m-1-\beta)}(0) (f_{i+1}^{(u)} - u_{i+1}^{(u)}) ] = \quad (4.1) \text{ の右辺}
\end{aligned}$$

この右辺は  $h_{i-1}^{2m-1-\beta} (f_0^{(u)} - u_0^{(u)}) = R_{\alpha} \eta^{-\alpha} e_i^{(u)}$  とおき、両辺を

$\frac{\beta+1}{2m-1-\beta} \cdot \frac{1}{p_0^{(2m-1-\beta)}(0)} \eta^{2m-1-\beta}$  とかけると

$$\sum_{\alpha=k}^{m-1} [ a_{i,\bar{u}-1}^{\beta,\alpha} e_{\bar{u}-1}^{(u)} + a_{i,\bar{u}}^{\beta,\alpha} e_{\bar{u}}^{(u)} + a_{i,\bar{u}+1}^{\beta,\alpha} e_{\bar{u}+1}^{(u)} ] = \varepsilon_i^{(\beta)} \quad (4.2)$$

の形になる。

$$\begin{aligned}
g_H^{(2m-1-\beta)}(1, \lambda_{i-1}) &= \sum_{\lambda=0}^{m-1} (-1)^{\lambda} \frac{\lambda_{i-1}^{2m-1-\lambda}}{(2m-1-\lambda)!} p_{\lambda}^{(2m-1-\beta)}(1) \\
&= \sum_{\lambda=0}^{m-1} (-1)^{\lambda} \frac{g_{\lambda}^{(2m-1-\beta)}(0)}{(2m-1-\lambda)!} \lambda_{i-1}^{2m-1-\lambda}
\end{aligned}$$

$$g_H^{(2m-1-\beta)}(0, \lambda_i) = \sum_{\lambda=0}^{m-1} (-1)^{\lambda} \frac{g_{\lambda}^{(2m-1-\beta)}(0)}{(2m-1-\lambda)!} (\lambda_i - 1)^{2m-1-\lambda}$$

と使う。

$$E_i^{(p)} = \eta^{2m} \sum_{\lambda=0}^{m-1} \frac{U_{\lambda}^{(p)}}{(2m-1-\lambda)!} \left\{ \int_0^1 (-1)^{\beta} \theta_{i-1}^{\beta+1} \lambda_{i-1}^{2m-1-\lambda} f^{(2m)}(y) d\lambda_{i-1} \right. \\ \left. - \int_0^1 (-1)^{\lambda} \theta_i^{\beta+1} (\lambda_i-1)^{2m-1-\lambda} f^{(2m)}(y) d\lambda_i \right\}$$

と  $T_0$  である。

$$\Phi_i = (e_i^{(k)}, e_i^{(k+1)}, \dots, e_i^{(m)})^T$$

$$Z_i = (z_i^{(k)}, z_i^{(k+1)}, \dots, z_i^{(m)})^T$$

と  $\Phi \subset E$ , (3.6) 式と (3.7) 式の式

$$A_{j,i-1} \Phi_{j-1} + A_{i,i} \Phi_i + A_{i,i+1} \Phi_{i+1} = Z_i \quad (4.3)$$

$$i=1, 2, \dots, m-1$$

が得られる。

[Type - I]

(4.3) 式を  $j=1$  とした式及び  $j=m-1$  とした式に

$\Phi_0 = \Phi_m = 0$  を代入すると

$$e_i^{(\alpha)} = \eta^{2m} \sum_{j=0}^{m-1} \sum_{\beta=k}^{m-1} \sum_{\lambda=0}^{m-1} \frac{U_{\lambda}^{(p)} \theta_i^{\beta+1}}{(2m-1-\lambda)!} \\ \times \int_0^1 \{ (-1)^{\lambda+1} b_{i,j}^{\alpha,\beta} (\lambda_j-1)^{2m-1-\lambda} + (-1)^{\beta} b_{i,j+1}^{\alpha,\beta} \lambda_j^{2m-1-\lambda} \} f^{(2m)}(y) d\lambda_j \quad (4.4)$$

$$b_{i,0}^{\alpha,\beta} = b_{i,m}^{\alpha,\beta} = 0 \quad j=1, 2, \dots, m-1$$

となる。一方、

$$f(x) - S_i(x_i) = \{ f(x) - H_i(x_i) \} + \{ H_i(x_i) - S_i(x_i) \} \\ = f(x) - H_i(x_i) + \sum_{\alpha=0}^{m-1} h_i^{\alpha} \{ (f_i^{(\alpha)} - u_i^{(\alpha)}) p_{\alpha}(x_i) + (f_{i+1}^{(\alpha)} - u_{i+1}^{(\alpha)}) z_{\alpha}(x_i) \}$$

である。この二つの式から、



$$f^{(l)}(x) - S_i^{(l)}(x_i) = \eta^{2m-l} \sum_{j=0}^{m-1} \int_0^1 \{g_j^{(l)}(x_i, \lambda_j) + \delta_{i,j} g_h^{(l)}(x_i, \lambda_j)\} f^{(2m)}(y) d\lambda_j$$

$$\begin{aligned} g_j^{(l)}(x_i, \lambda_j) &= \sum_{\alpha=k}^{m-1} \sum_{\beta=k}^{m-1} \sum_{\lambda=0}^{m-1} \frac{R_\alpha \theta_i^{\alpha-l} U_\lambda^{(\beta)}}{(2m-l-\lambda)!} \theta_i^{\beta+1} \\ &\quad \times [(-1)^{\lambda+1} \{b_{i,j}^{\alpha,\beta} p_\alpha^{(l)}(x_i) + b_{i+1,j}^{\alpha,\beta} g_\alpha^{(l)}(x_i)\} (\lambda_j - 1)^{2m-l-\lambda} \\ &\quad + (-1)^\beta \{b_{i,j+1}^{\alpha,\beta} p_\alpha^{(l)}(x_i) + b_{i+1,j+1}^{\alpha,\beta} g_\alpha^{(l)}(x_i)\} \lambda_j^{2m-l-\lambda}] \\ b_{0,j}^{\alpha,\beta} &= b_{m,j}^{\alpha,\beta} = b_{i,0}^{\alpha,\beta} = b_{i,m}^{\alpha,\beta} = 0 \end{aligned} \quad (4.5)$$

$$g_h^{(l)}(x_i, \lambda_i) = \theta_i^{2m-l} g_h^{(l)}(x_i, \lambda_i)$$

から得られる。これから

$$\begin{aligned} |f^{(l)}(x) - S_i^{(l)}(x_i)| &\leq \eta^{2m-l} \sum_{j=0}^{m-1} \int_0^1 |g_j^{(l)}(x_i, \lambda_j) + \delta_{i,j} g_h^{(l)}(x_i, \lambda_j)| d\lambda_j \\ &\quad \times \|f^{(2m)}(y)\|_\infty \end{aligned} \quad (4.6)$$

から得られる。

$$E_i^{(l)} = \max_x \sum_{j=0}^{m-1} \int_0^1 |g_j^{(l)}(x_i, \lambda_j) + \delta_{i,j} g_h^{(l)}(x_i, \lambda_j)| d\lambda_j$$

とおくと、

$$\|f^{(l)}(x) - S_i^{(l)}(x_i)\|_\infty \leq E_i^{(l)} \eta^{2m-l} \|f^{(2m)}(x)\|_\infty \quad (4.7)$$

から得られる。

ここに収束率について簡単にふたておく。  $|b-a| \rightarrow 0$  のとき、  $\eta \rightarrow 0$  であるから  $\theta_i$  は一定である。(3.4) 式などからわかるように  $A_i$  には  $\eta$  を含んでいない。従って  $E_i^{(l)}$  は  $\eta$  によらない定数である。このことから、Type-I スプラインの収束率は、Ahlberg, Nielson, Walsh の流儀で書くと、

$O(\|\Delta\|^{2m-2})$  なるものがある。はつきり言える。

[Type-II]

(2.9) 式から.

$$f^{(k)}(x_0+0) = \sum_{\alpha=0}^{m-1} h_0^{\alpha-k} \{f_0^{(k)} p_\alpha^{(k)}(0) + f_1^{(k)} g_\alpha^{(k)}(0)\} \\ + h_0^{2m-k} \int_0^1 g_H^{(k)}(0, s_0) f^{(2m)}(y) ds_0.$$

である。これから

$$\sum_{\alpha=k}^{m-1} h_0^{\alpha-k} \{(f_0^{(k)} - u_0^{(k)}) p_\alpha^{(k)}(0) + (f_1^{(k)} - u_1^{(k)}) g_\alpha^{(k)}(0)\} \\ = -h_0^{2m-k} \int_0^1 g_H^{(k)}(0, s_0) f^{(2m)}(y) ds_0.$$

と仮定する。 (4.3) 式を得たと同様の変形をする。

$$\sum_{\alpha=k}^{m-1} [a_{00}^{\beta, \alpha} e_0^{(\alpha)} + a_{01}^{\beta, \alpha} e_1^{(\alpha)}] = \zeta_0^{(\beta)} \quad (4.8)$$

$$\zeta_0^{(\beta)} = \eta^{2m} \sum_{\lambda=0}^{m-1} \frac{U_\lambda^{(\beta)}}{(2m-1-\lambda)!} \int_0^1 (-1)^{\lambda+1} \theta_0^{\beta+1} (s_0-1)^{2m-1-\lambda} f^{(2m)}(y) ds_0.$$

同様に  $k=1, 2, \dots$

$$\sum_{\alpha=k}^{m-1} [a_{n, n-1}^{\beta, \alpha} e_{n-1}^{(\alpha)} + a_{n, n}^{\beta, \alpha} e_n^{(\alpha)}] = \zeta_n^{(\beta)} \quad (4.9)$$

$$\zeta_n^{(\beta)} = \eta^{2m} \sum_{\lambda=0}^{m-1} \frac{U_\lambda^{(\beta)}}{(2m-1-\lambda)!} \int_0^1 (-1)^\beta \theta_{n-1}^{\beta+1} s_{n-1}^{2m-1-\lambda} f^{(2m)}(y) ds_{n-1}$$

を得る。従って (4.3) 式を  $i=1, 2, \dots, n-1$  とした式, (4.8),

(4.9) 式から

$$e_i^{(\alpha)} = \sum_{\beta=k}^{m-1} b_{i,0}^{\alpha, \beta} \zeta_0^{(\beta)} + \sum_{j=1}^{n-1} \sum_{\beta=k}^{m-1} b_{i,j}^{\alpha, \beta} \zeta_j^{(\beta)} + \sum_{\beta=k}^{m-1} b_{i,n}^{\alpha, \beta} \zeta_n^{(\beta)}$$

となる。この式は, (4.4) 式と同形になる。(4.4) 式と

異なる点  $b_{i,0}^{\alpha, \beta} \neq 0, b_{i,n}^{\alpha, \beta} \neq 0$  となる可能性がある。後の計

算は Type-I の場合と同様に  $k=1, 2, \dots$  である。

$$\|f^{(k)}(x) - \tilde{f}_0^{(k)}(x_i)\|_\infty \leq E_1^{(k)} \eta^{2m-k} \|f^{(2m)}(x)\|_\infty$$

となる。  $E_1^{(k)}$  は Type-I と異なる点  $(x_i, y_j)$  にはあらわ  
れず  $b_{0,j}^{\alpha,\beta}, b_{n,j}^{\alpha,\beta}, b_{i,0}^{\alpha,\beta}, b_{i,n}^{\alpha,\beta}$  は 0 となるだけである。

[Periodic]

$e_0 = e_n$  であることを使うと、

$$\begin{cases} A_{11}e_1 + A_{12}e_2 + \dots + A_{1n}e_n = E_1 \\ A_{i,n-1}e_{i-1} + A_{i,i}e_i + A_{i,i+1}e_{i+1} = E_i \\ \quad i = 2, 3, \dots, n-1 \\ A_{n,1}e_1 + A_{n,n-1}e_{n-1} + A_{n,n}e_n = E_n \end{cases}$$

である。  $E_n$  の要素は  $E_i^{(k)}$  を与える式で  $i=n$  とし、  $0_n$  の  
代わりに  $0_0$ ,  $A_n$  の代わりに  $A_0$  とすれば得られる。他の要  
素は他と同じである。これを使って Type-I の場合と同じさ  
うな計算をすれば、

$$\|f^{(k)}(x) - \sum_{i=0}^n E_i^{(k)}(x)\|_{\infty} \leq E_1^{(k)} \eta^{2n-k} \|f^{(2n)}(x)\|_{\infty}$$

となる。  $E_1^{(k)}$  は Type-I と異なる点  $(x_i, y_j)$  にはあらわ  
れず  $b_{0,j}^{\alpha,\beta}$  を  $b_{n,j}^{\alpha,\beta}$ ,  $b_{i,0}^{\alpha,\beta}$  を  $b_{i,n}^{\alpha,\beta}$  と置きかえるだけであ  
る。

それぞれの場合について、  $n, m, k, l$  を与えて、  $E_1^{(k)}$  を  
計算すれば、スプラインの誤差評価が出来ることになる。

しかし、実際にプログラムを作った  $E_1^{(k)}$  を計算して見た  
と、かなり控え目の誤差評価になる上に、意外に時間がかかる。  
  $m=3, k=1, n=72$  程度でも FACOM-230-60 で数10

介在時間から、現在にさかのぼる誤差評価は行なは、断念  
しう。

代わりに (4.4) 式から

$$\|e_i^{(u)}\|_\infty \leq \eta^{2u} K^{(u)} \|f^{(2u)}(x)\|_\infty$$

の形の  $K^{(u)}$  を計算し (この計算にも かなり時間がかかるが  $E_1^{(u)}$  の計算程ではない。)

$$\begin{aligned} |f^{(u)}(x) - \tilde{f}_i^{(u)}(x)| &\leq |f^{(u)}(x) - H_i^{(u)}(x)| + \left| \sum_{k=0}^{u-1} R_k \theta_i^{u-k} \eta^{-k} \{e_i^{(k)} p_k^{(u)}(x) + e_{i+1}^{(k)} q_k^{(u)}(x)\} \right| \\ &\leq \eta^{2u-2} \left\| \int_0^1 |g_{H_i}^{(u)}(x, \lambda)| d\lambda \right\|_\infty \|f^{(2u)}(x)\|_\infty \\ &\quad + \sum_{k=0}^{u-1} R_k \theta_i^{u-k} \eta^{-k} \|e_i^{(k)}\|_\infty \times \| |p_k^{(u)}(x)| + |q_k^{(u)}(x)| \|_\infty \\ &= \eta^{2u-2} E_2^{(u)} \|f^{(2u)}(x)\|_\infty \end{aligned} \quad (4.10)$$

の形にして  $E_2^{(u)}$  を計算して置く。

この形の誤差評価もやはり、かなり複雑な図式がある。(4.4)

式から部外項をとり、

$$\begin{aligned} e_i^{(u)} &= \eta^{2u} \sum_{j=0}^{u-1} \sum_{\beta=k}^{u-1} \sum_{\lambda=0}^{u-1} \frac{U_\lambda^{(j)} \theta_j^{\beta+1}}{(2u-1-\lambda)!} \{ b_{i,j}^{\alpha,\beta} f_j^{(2u)} + (-1)^\beta b_{i,j+1}^{\alpha,\beta} f_{i+1}^{(2u)} \} \\ &\quad - \eta^{2u+1} \sum_{j=0}^{u-1} \sum_{\beta=k}^{u-1} \sum_{\lambda=0}^{u-1} \frac{U_\lambda^{(j)} \theta_j^{\beta+2}}{(2u-\lambda)!} \\ &\quad \times \int_0^1 \{ (-1)^{\lambda+1} b_{i,j}^{\alpha,\beta} (\lambda_j - 1)^{2u-\lambda} + (-1)^\beta b_{i,j+1}^{\alpha,\beta} \lambda_j^{2u-\lambda} \} f^{(2u+1)}(\eta) d\lambda_j \end{aligned}$$

と作る部外項は、

$$\eta^{2u} (-1)^u \frac{(u-1)! u!}{(2u-1)! (2u)!} \sum_{j=0}^u \sum_{\beta=k}^{u-1} \{ \theta_j^{\beta+1} + (-1)^\beta \theta_{j-1}^{\beta+1} \} b_{i,j}^{\alpha,\beta} f_j^{(2u)}$$

となる。これから

$$\|e_i^{(u)}\|_\infty \leq \eta^{2m} K_1^{(u)} \|f^{(2m)}(x)\|_\infty + \eta^{2m+1} K_2^{(u)} \|f^{(2m+1)}(x)\|_\infty$$

の形での  $K_1^{(u)}$ ,  $K_2^{(u)}$  を計算し、(4.10) 式を得るのと同じようにして、

$$\|f^{(u)}(x) - \tilde{f}_i^{(u)}(x)\|_\infty \leq \eta^{2m-2} E_3^{(u)} \|f^{(2m)}\|_\infty + \eta^{2m+1-2} E_4^{(u)} \|f^{(2m+1)}\|_\infty$$

の形に  $E_3^{(u)}$ ,  $E_4^{(u)}$  を計算する。

この形での誤差評価は、またいくぶん控え目の値であると思われるが、適量下例を計算した実際の誤差にわりと近い結果が得られる。

### (参考文献)

- 1) Ahlberg, Nielson, Walsh: The Theory of Splines and Their Applications, (284 pp) New York and London: Academic Press 1967.
- 2) 志坂衛: 曲線、曲面の合成および平滑化理論, 情報処理, Vol 10, 121-131 (1969)
- 3) C.A. Hall: On Error Bounds for Spline Interpolation, Journal of Approximation Theory 1, 209-218 (1968)
- 4) M.H. Schultz and R.S. Varga: L-Splines, Numerische Mathematik 10, 345-369 (1967)

# 付 録

本文で述べた誤差解析の結果を使って、いくつかの場合について誤差の大きさを数値的に計算した。その結果を以下に示す。

Fig. 1 分割  $\Delta$  から等間隔即ち、 $x_i = \eta i$  と  $i = 0, 1, \dots, 32$  ( $n=32$ ) のとき、与えられた関数  $f(x)$  に対する Type-I スプラインの各区間  $x_i \leq x \leq x_{i+1}$  の誤差の最大絶対値  $(R_i^{(1)})_i$  は

$$\begin{aligned} (R_i^{(1)})_i &= \|f^{(1)}(x) - S_i^{(1)}(x_i)\|_\infty \\ &\leq \max_{x_i \leq x \leq x_{i+1}} \int_{x_0}^{x_n} |G_i^{(1)}(x, y)| dy \cdot \|f^{(2n)}\|_\infty \\ &= \eta^{2n-2} (E_i^{(1)})_i \cdot \|f^{(2n)}\|_\infty \end{aligned}$$

とする。  $G_i^{(1)}(x, y)$  は式 (4.6) の右辺で、 $t_0 = (x - x_i)/h_i$ ,  $t_j = (y - y_j)/h_j$  ( $i, j$  については  $h_i = \eta$  とある。) とおけば得らる。

Fig. 1 に

$$(1) \max_{x_i \leq x \leq x_{i+1}} \int_{x_0}^{x_n} |G_i^{(1)}(x, y)| dy / \eta^{2n-2} \quad \text{を算出する。}$$

$$(2) \max_{x_i \leq x \leq x_{i+1}} \left| \int_{x_0}^{x_u} G_i^{(l)}(x, y) dy \right| / y^{2m-l} \quad \text{と一点の値を} \quad \text{とる.}$$

$$(3) \quad x_i = \frac{2\pi}{32} i \quad (i=0, 1, \dots, 32) \quad \text{と} \quad \sin^{(r)} x_i \quad (r=0, 1, \dots, k-1)$$

$$\text{と} \quad \sin^{(r)} x \quad (r=k, k+1, \dots, m-1) \quad \text{と} \quad \text{与え}$$

2 Type-I スプラインを補間したとき.

$$\max_{x_i \leq x \leq x_{i+1}} \left| \sin^{(r)}(x) - S_i^{(l)}(x) \right| / y^{2m-l} \quad \text{と一点の値を}$$

とる.

$$\text{Fig. 1-1} \quad \text{に} \quad m=3, \quad k=1, \quad l=0$$

$$1-2 \quad \text{に} \quad m=3, \quad k=1, \quad l=1$$

$$1-3 \quad \text{に} \quad m=3, \quad k=2, \quad l=0$$

$$1-4 \quad \text{に} \quad m=3, \quad k=2, \quad l=1$$

の場合を示す.

$k=1$  即ち関数値のみを与えて補間したとき.

$$\max_{x_i \leq x \leq x_{i+1}} \int_{x_0}^{x_u} |G_i^{(l)}(x, y)| dy / y^{2m-l} \quad \text{と}$$

$$\max_{x_i \leq x \leq x_{i+1}} \left| \int_{x_0}^{x_u} G_i^{(l)}(x, y) dy \right| / y^{2m-l} \quad \text{と} \quad l=0, 1 \quad \text{の場合}$$

若くは  $10^{1.3}$  以下、大きい値となるから、 $k=2$  即ち関数値及び一次微係数を与える場合.

$$\max_{x_i \leq x \leq x_{i+1}} \int_{x_0}^{x_u} |G_i^{(l)}(x, y)| dy / y^{2m-l} = \max_{x_i \leq x \leq x_{i+1}} \left| \int_{x_0}^{x_u} G_i^{(l)}(x, y) dy \right| / y^{2m-l}$$

であり、2の2乗に付、 $\int_{x_0}^{x_n} |G_i^{(k)}(x, y)| dy$  は最大にする  $x$  に対し、 $k=1$  の場合は  $G_i^{(k)}(x, y)$  が  $y$  の変換に対して符号が変化するが、 $k=2$  の場合は符号が変換して  $y$  のことを意味している。

Fig. 2 Fig. 1 に示した結果は  $f(x) \in C^{2m-1}[x_0, x_n]$ ,  $f^{(2m)}(x) \in L^2[x_0, x_n]$  を満たす  $f(x)$  に対しての optimum error bound を与えている。これを計算するにはかなり時間がかかるが、 $m=3$  (5次) の場合についてのみ示している。

$x_i \leq x \leq x_{i+1}$  に対して  $f(x)$  に対する区分的エルミート補間を  $H_i^{(k)}(x)$  とする。  $f^{(k)}(x)$  に対する  $S_i^{(k)}(x)$  の誤差を

$$|f^{(k)}(x) - S_i^{(k)}(x)| \leq |f^{(k)}(x) - H_i^{(k)}(x)| + |H_i^{(k)}(x) - S_i^{(k)}(x)|$$

の形に2つに分けると誤差の計算も比較的容易になる。(式(4.10))

Fig. 2 に

$$\begin{aligned} \|f^{(k)}(x) - S_i^{(k)}(x)\|_\infty &\leq \|f^{(k)}(x) - H_i^{(k)}(x)\|_\infty \\ &\quad + \|H_i^{(k)}(x) - S_i^{(k)}(x)\|_\infty \\ &= \eta^{2m-2}(E_2^{(k)})_i \|f^{(2m)}\|_\infty \end{aligned}$$

の形に、 $(E_2^{(k)})_i$  をいくつかの場合について示す。

$k=1, l=0$  の場合について



$$n = 8, 16, 32 \quad \text{v.}$$

Type-I	(異端)	} スプラインに対して
Type-II	(一点鋭端)	
Periodic	(点端)	

$$m = 2, 3, 4, 5, 6, 7, 8$$

9 場合について示している。図中、たとえば II(32) とあるのは Type-II で  $n=32$  の場合、I(16) とあるのは、

Type-I で  $n=16$  , P(8) とあるのは Periodic で  $n=8$  の場合である。

この図から一般に  $(E_2^{(k)})_i$  の大きさは Type-II の最も大きく、Type-I の最も小さい。又、端付近を除けば、 $n$  が増大するにつれて、このスプラインの場合も  $(E_2^{(k)})_i$  の大きさは次第に一定値に近づくことがわかる。

Fig. 3 Fig. 2 における  $i$  の変化に対する  $(E_2^{(k)})_i$  の大きさを、 $k=1, l=0$  の場合について示している。

Fig. 3 に  $k, l, m$  の変化に対する  $\max(E_2^{(k)})_i = E_2^{(k)}$  を Type-I スプラインの  $n=32$  の場合について示す。

Fig. 1-1

 $m=3$  $k=1$  $l=0$ 

Type-I

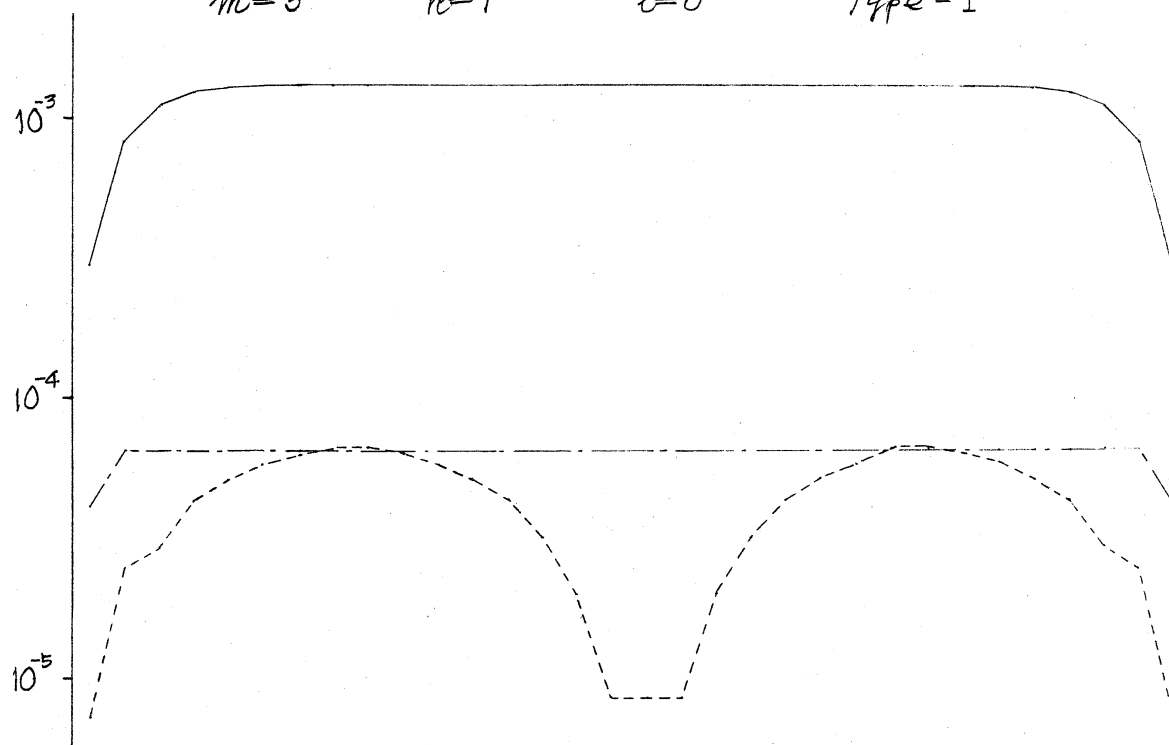


Fig. 1-2

 $m=3$  $k=1$  $l=1$ 

Type-I

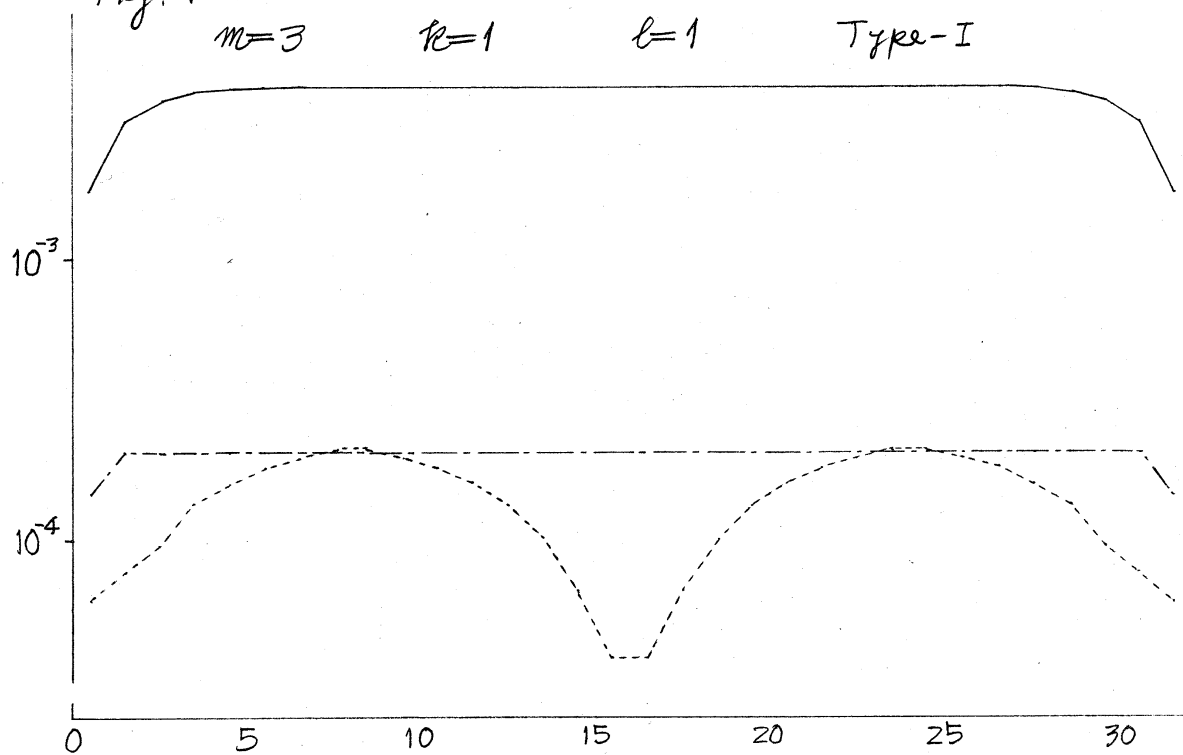
 $x$

Fig. 1-3

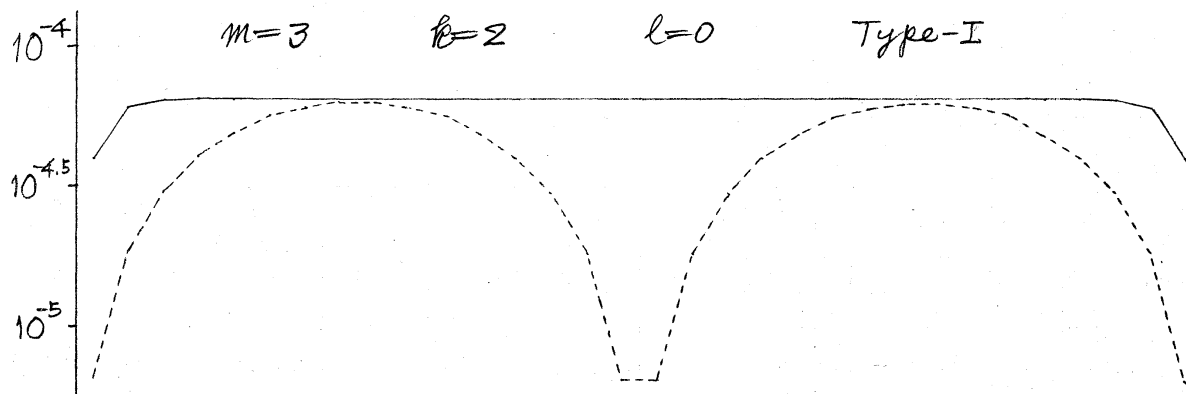
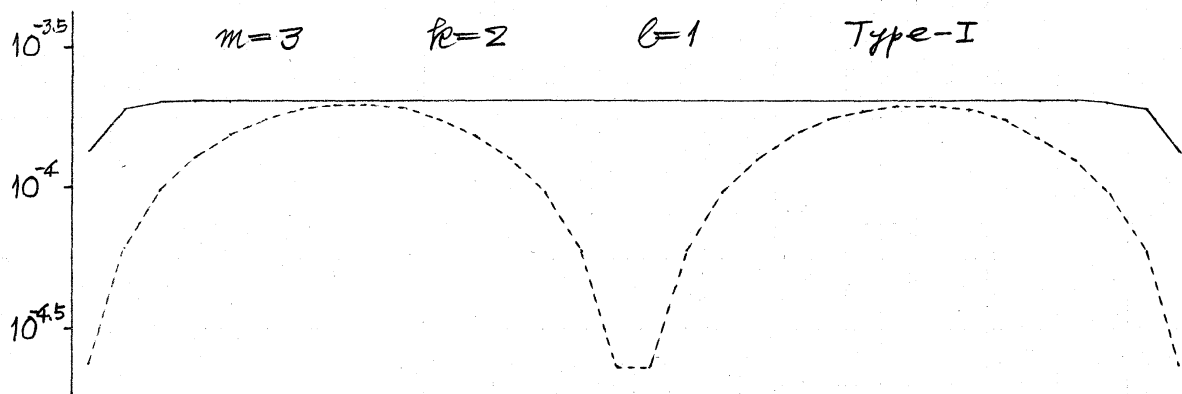


Fig. 1-4



0      5      10      15      20      25      30

Fig. 2-1

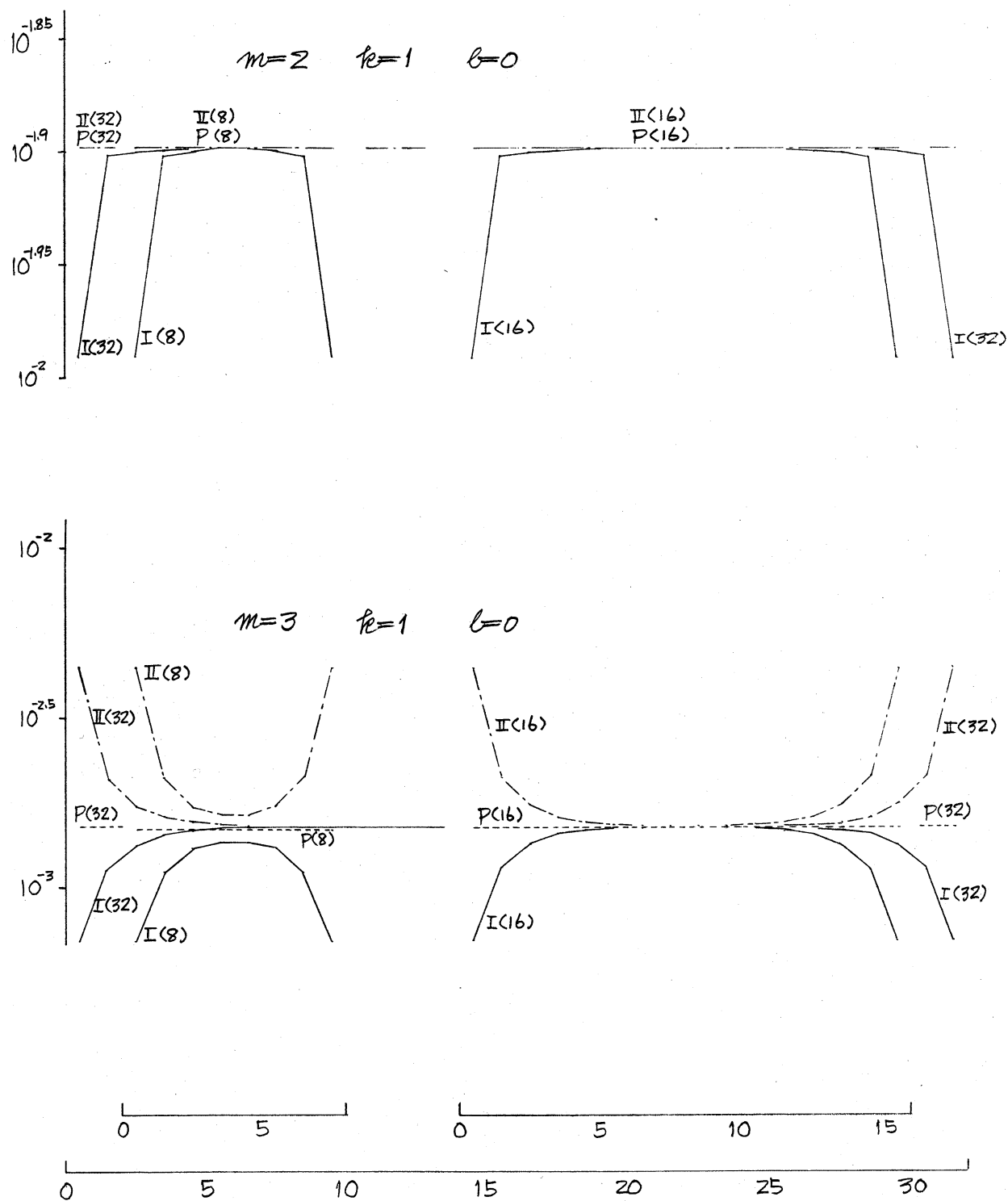


Fig. 2-2

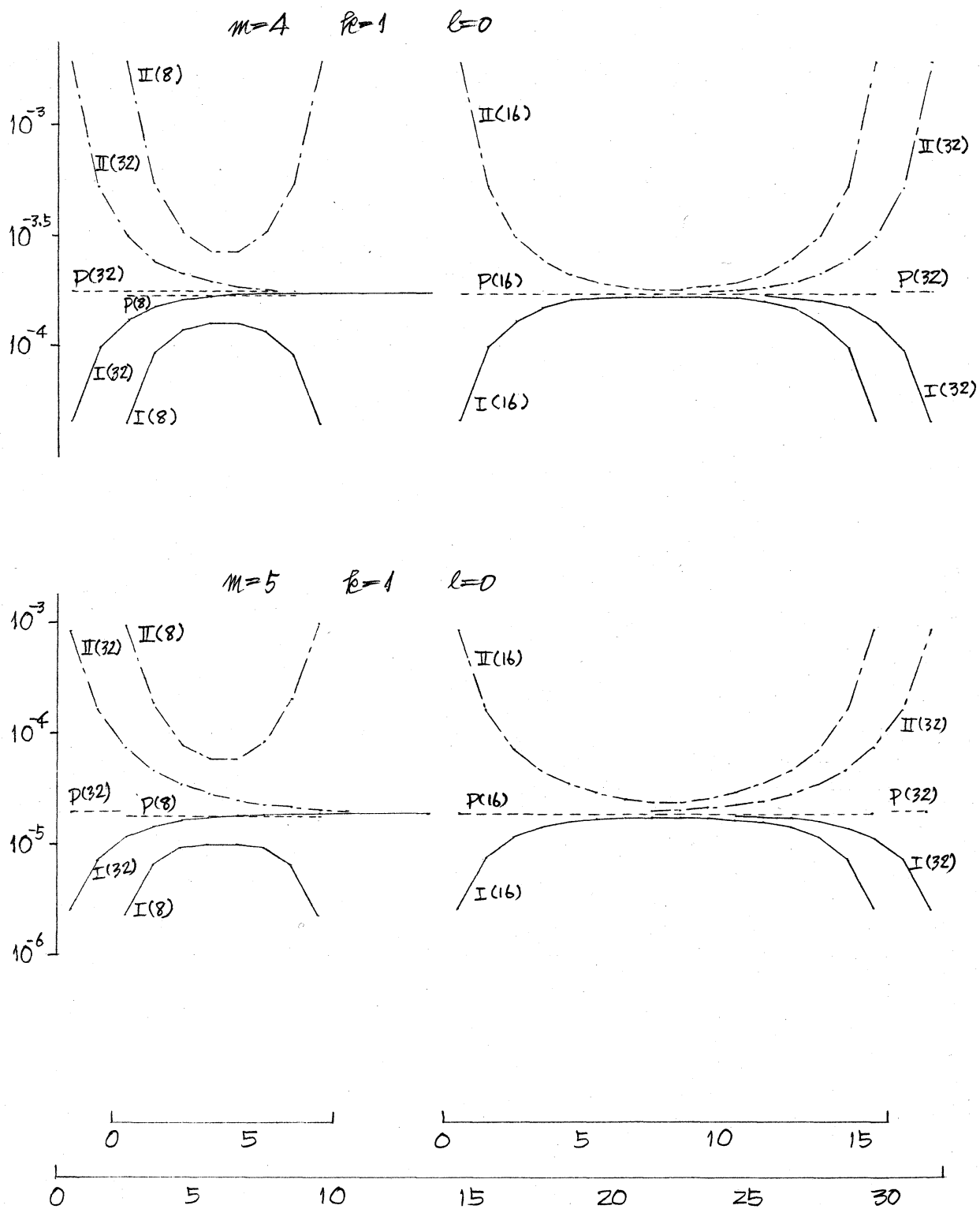


Fig. 2-3

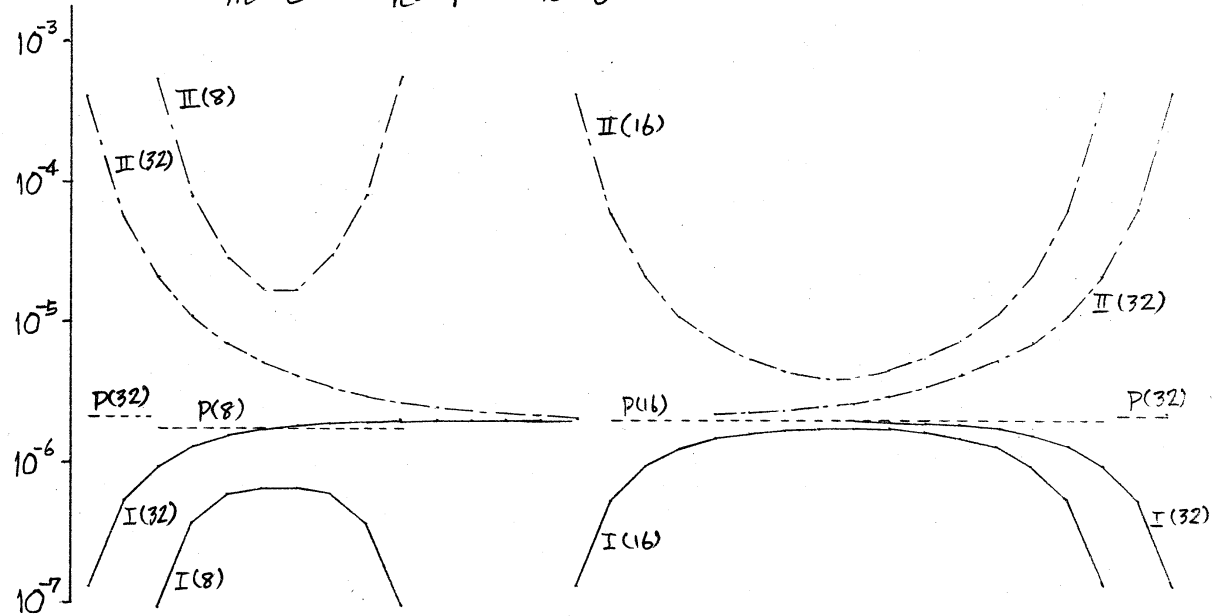
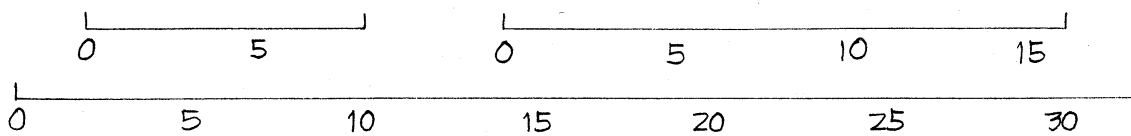
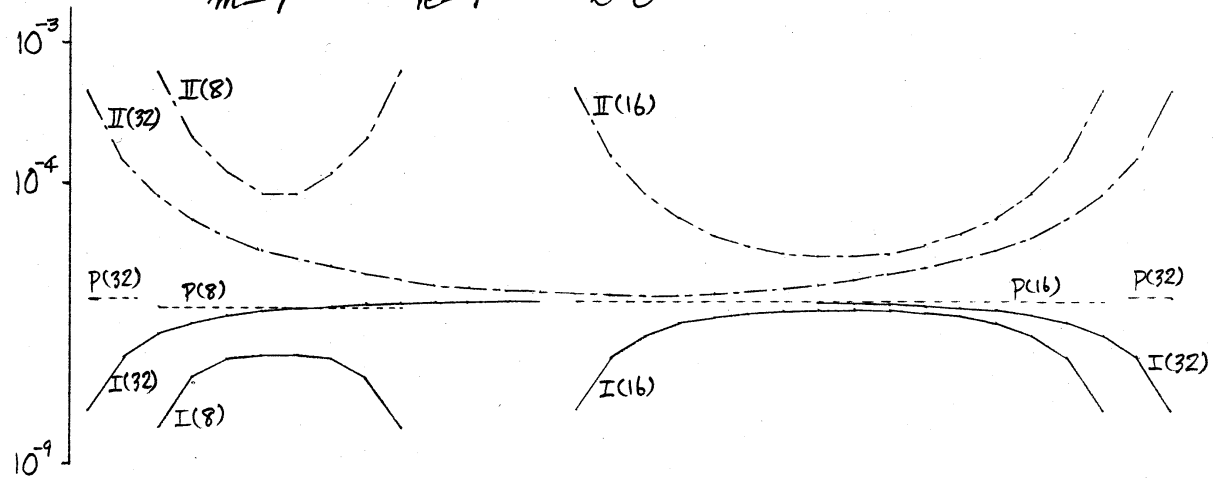
 $m=6 \quad R=1 \quad l=0$  $m=7 \quad R=1 \quad l=0$ 

Fig. 2-4

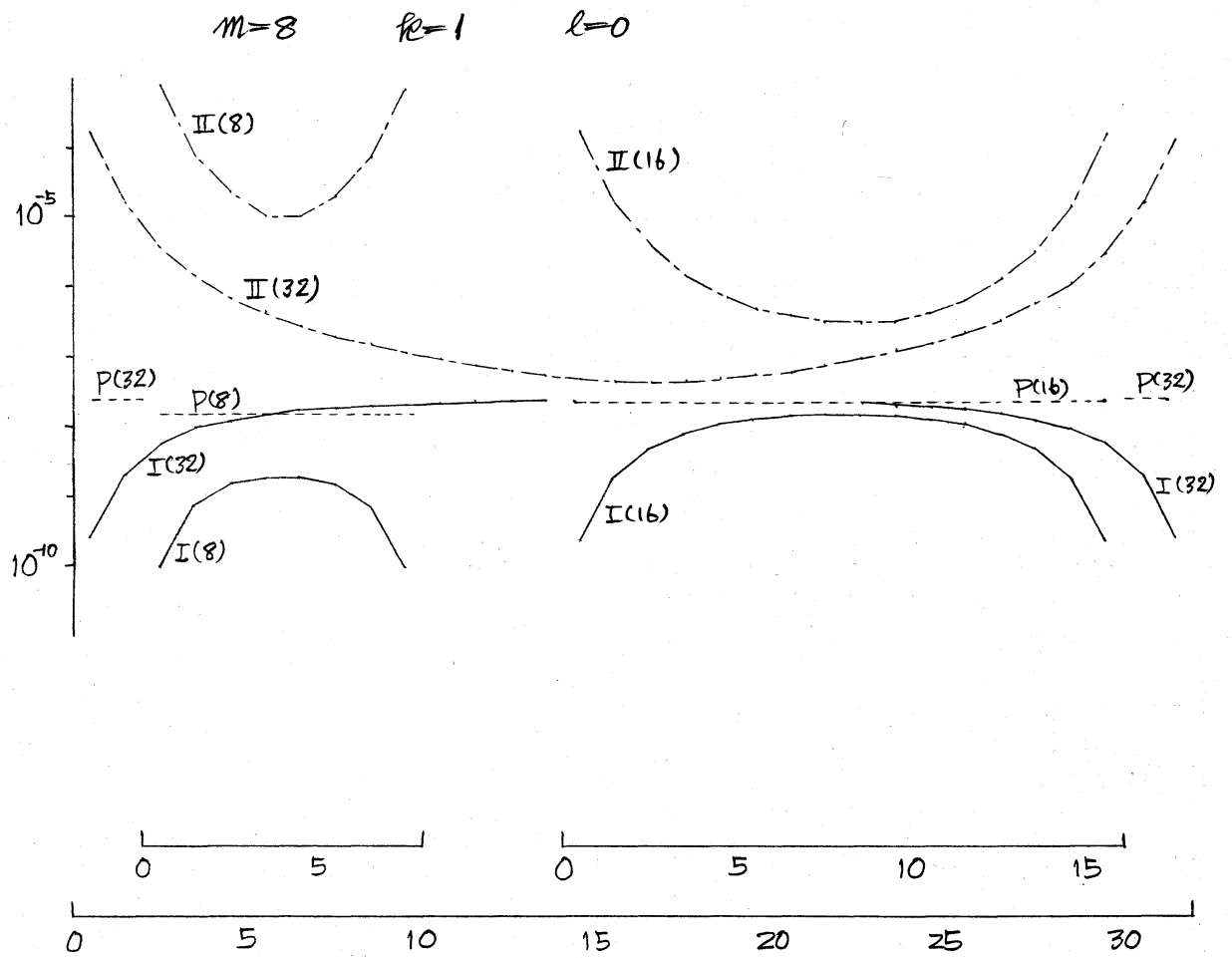


Fig. 3-1

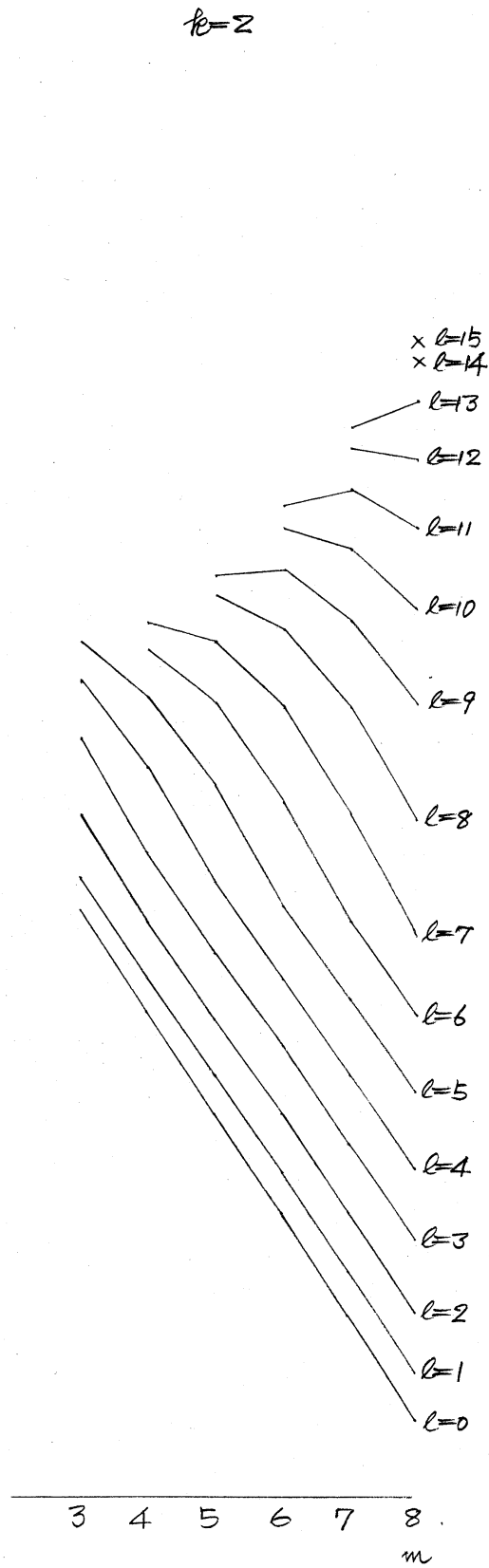
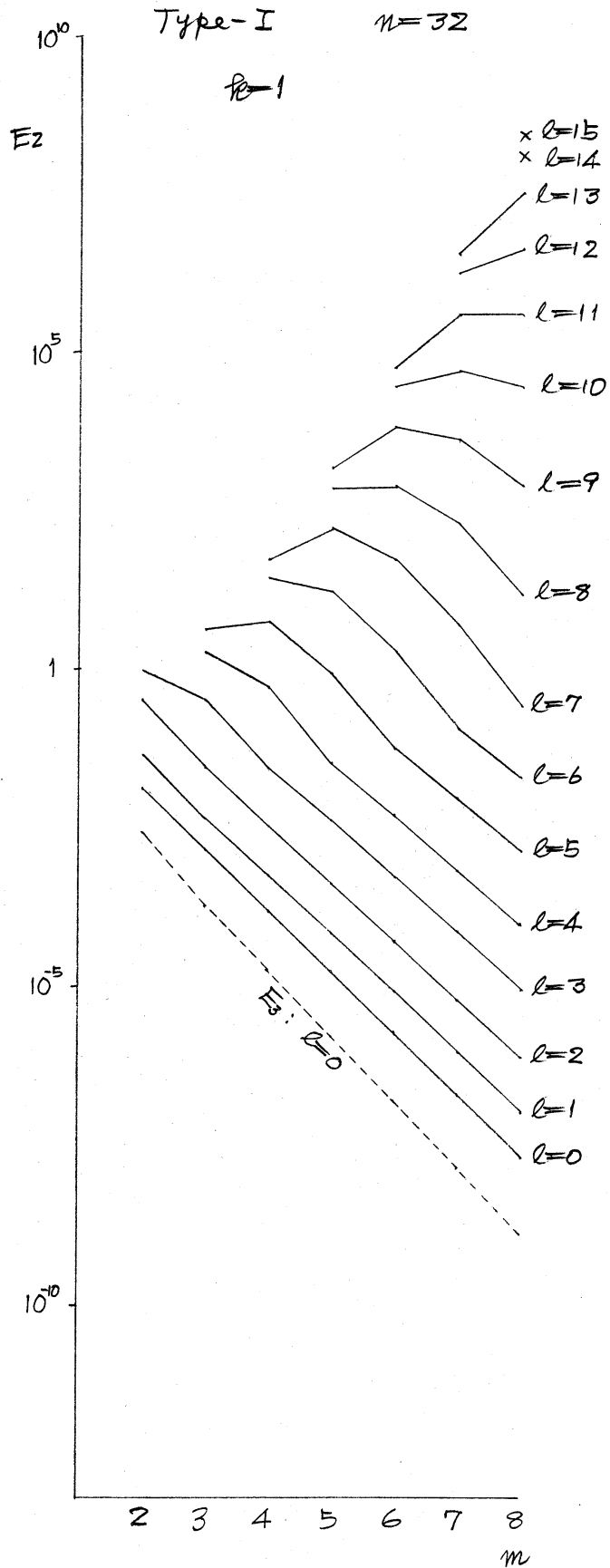




Fig. 3-2

